Mechanik I

materiellen Punkten von Zeit $M(t)$ → starrer Bezugspunkt (Abstand

orthogonale Achsen

1) kartesische x, y, z

2) zylindrisch ρ, φ, z

3) sphärisch r, θ, φ

$x = \rho \cdot \cos(\varphi)$ $\quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = \rho \cdot \sin(\varphi)$ $\quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$z = z$ $\quad z = z$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$

$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$ $\quad y = r \cdot \sin(\theta)\, \sin(\varphi)$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad z = r \cdot \cos(\theta)$

Vektor ⇒ bestimmte Länge + Richtung $\quad \underline{e}_x \perp \underline{e}_y \perp \underline{e}_z$

$\underline{e}_x \cdot \underline{e}_x = 1 \quad | \quad e_x \cdot e_y = 0$

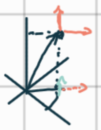
$|\underline{e}|^2 = 1 \quad \quad \to \pi/2$

$|\underline{e}| = 1$

Projektion  $\underline{a} \cdot \underline{e}_x = |a| \cdot 1 \cdot \cos(\varphi)$ Richtung e_x

K $\quad \underline{r} = x \cdot \underline{e}_x + y \cdot \underline{e}_y + z \cdot \underline{e}_z \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Skalare | Vektorielle Komponente

Z  $\quad r = \rho \cdot \underline{e}_\rho + z \underline{e}_z \quad \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

$e_\varphi(\varphi) \quad (r(t)) = \rho(t) \cdot e_\rho \cdot (\varphi(t)) + z(t) e_z$

S $\quad e_r, e_\theta, e_\varphi$

$\underline{r} = r e_r \quad e_r(\theta, \varphi) \quad \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geschwindikeit ⇒ $v = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} \quad \underline{v} = \dot{\underline{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$

$\dot{s}$ = Schnelligkeit

$\underline{v} = \dot{s} \cdot \underline{\tau}$ } tangentialer Einheitsvektor (Richtung)

$\tau = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{\underline{v}}{\dot{s}}$ (Schnell)

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \dot{\underline{r}} = \dot{x}\, \underline{e}_x + \dot{y}\, \underline{e}_y + \dot{z}\, \underline{e}_z \quad (\dot{\underline{e}}_z = 0) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \dot{\underline{r}} = \dot{\rho}\, e_\rho + \rho \cdot \underbrace{\dot{\varphi}\, e_\varphi}_{\dot{e}_\rho} + \dot{z} e_z \quad \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

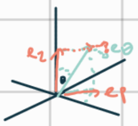
$\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\underline{r}} = \dot{r} e_r + r \underbrace{\dot{\theta} e_\theta + r \sin(\theta) \dot{\varphi} e_\varphi}_{\dot{e}_r}$

$e_\rho = \underline{e}_x \cdot \cos(\varphi) + \underline{e}_y \sin(\varphi)$

$\underline{e}_\varphi = -\underline{e}_x \cdot \sin(\varphi) + \underline{e}_y \cdot \cos(\varphi)$

$\dot{e}_\rho = -\dot{\varphi} \cdot \underline{e}_x \cdot \sin(\varphi) + \dot{\varphi} \cdot e_y \cos(\varphi)$

$\dot{e}_\rho = \dot{\varphi} \underbrace{(-\sin(\varphi) \cdot e_x + \cos(\varphi) \cdot e_y)}_{e_\varphi}$



$\underline{e}_r = \cos(\theta) \cdot e_z + \sin(\theta)\, e_\rho$

$\underline{e}_\varphi = e_x \cos(\varphi) + \sin(\varphi) e_y$

$\underline{e}_r = \cos(\theta) \cdot e_z + \sin(\theta)(-\sin\varphi) \cdot e_y + \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) e_x$

$e_\theta = \cos(\theta) \underline{e}_\varphi - \sin(\theta) \cdot e_z$

$\dot{e}_r = (\dot{\theta} \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\theta) \cdot \dot{\varphi} \sin(\varphi)) e_x$
$+ \dot{\theta} \cos(\theta) \cdot \sin\varphi - \dot{\varphi} \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta) \cdot e_y$
$- \sin(\theta) \dot{\theta}\, e_z$

$\dot{e}_r = \dot{\theta} e_\theta + \sin(\theta) \dot{\varphi} e_\varphi$

Kreisbewegung

$\underline{v} = R \cdot \dot{\varphi} e_\varphi$

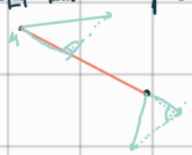
Winkelgeschwindigkeit

$\underline{\omega} = \dot{\varphi} \cdot e_z \quad |\underline{\omega}| = \dot{\varphi} = \omega$

$\underline{v} = \underline{r} \times \underline{\omega} \quad$ bei $\underline{\omega}$ ist $\underline{v} = 0$

Starrerkörper Abstand zwischen 2 Punkten konstant / Winkel verbindungsvektor konstant

$\underline{a}(t) \cdot \underline{a}(t) = |\underline{a}|^2$ konstant | Satz der Projezierten Geschwindigkeit v_M, v_N immer gleiche Projektion in Richtung ihrer Verbindungsgeraden MN auf

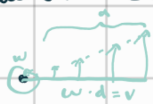


Translation ⇒ falls $\underline{a}$ = konstant ⇒ Richtung von $\underline{MN}$ ist $|\underline{MN}|$ ⇒ konstant ⇒ alle Punkte gleiche $\underline{v} = \underline{v}_{A,B,K}$

Bahnkurve von allen kongruent geradlinige Translation oder krummlinige Translation

Rotation ⇒ falls 2 Punkte in Ruhe μ → durch diesen 2 Punkte des Körpers ⇒ alle Punkte auf μ $v=0$

alle anderen eine Kreisbewegung = ω gleich | $\underline{v}_r \perp \mu$ $\quad \underline{v}_r \perp \underline{\omega}$ | $\underline{v}_a = \underline{\omega} \times \underline{r}$ (Bezugspunkt auf μ; $\underline{OA}$, $O \in \mu$) $\quad v_p = \omega \cdot d$



$$\underline{v}_A \times \underline{v}_B = k \cdot \underline{\omega}$$

Rollen $\hat{=}$ Kontakt Punkte $\hat{=}$ Achse $\mu \rightarrow \mu(t)$

⇒ $v(z_1) = v(z_2)$ Momentanzentrum ∈ Boden

gleiten ⇒ $v(z_1) \neq v(z_2)$ MZ nicht auf dem Boden

Kreisel ⇒ 1 Punkt in Ruhe → aber momentan immer eine Achse in Ruhe
8

Starrkörperformel = $\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BA}$ $\quad$ Kinemate $\{\underline{v}_B, \underline{\omega}\}$ $\quad$ $\underline{\omega}$ → 1. Invariant bleibt im Starrerkörper gleich.

$\left(\text{Rotation} \quad \underline{v}_A = \underline{v}_B \quad \overline{AB} \parallel \underline{\omega} \right)$

↳ $\underline{\omega} = 0$ Translation $\underline{v}_A = \underline{v}_B$

$\omega \neq 0$ & $\underline{v}_B = 0$ Rotation → Achse durch B $\underline{v}_A = \underline{\omega} \times \underline{BA}$ $\quad B \in \mu$

↳ $\underline{v}_A \perp \underline{\omega}$ $\quad A \in \mu$

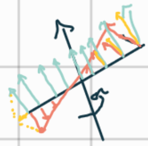
2. Invariant ⇒ $\underline{v}_\omega$ ⇒ Bewegung in $\underline{\omega}$ $\quad \underline{v}_\omega = v_\omega \cdot \underline{e}_\omega$ $\quad \underline{e}_\omega = \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}$

$$\underline{v}_\omega = (\underbrace{\underline{v}_A \cdot \underline{e}_\omega}_{v_\omega}) \cdot \underline{e}_\omega$$

↓

Schraubung ⇒ Translation + Rotation

∑ Zentralachse → Kinemate $\{\underline{v}_\omega, \underline{\omega}\}$



Ebene Bewegung nie Schraubung

Satz vom Momentanzentrum ⇒ Z ⇒ $\omega \cdot r = v_A$